



## CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „PETRU MAIOR”

Colegiul „Petru Maior” Reghin

EDIȚIA a II-a, 9.04.2022

Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

## SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia geometrică  $(b_n)_{n \geq 1}$  cu  $b_1 = 2$  și rația  $q = \sqrt{5}$ . Calculați partea întreagă a lui  $b_4$ .
- 5p 2. Se consideră funcția bijectivă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$ . Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor  $f$  și  $f^{-1}$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(2x^2 + x + 1) - \log_2(x^2 - x + 2) = 1$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, suma cifrelor sale să fie divizibilă cu 11.
- 5p 5. Se consideră vectorii  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  și  $\vec{v} = a\vec{i} - 2\vec{j}$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$  pentru care  $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ .
- 5p 6. Arătați că, dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x$ , atunci  $x = \frac{\pi}{8}$ .

## SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2a-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)x + 2y + z = a \end{cases}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(4)) = 5$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care matricea  $A(a)$  nu este inversabilă.
- 5p c) Pentru  $a = 3$ , determinați soluțiile  $(x_0, y_0, z_0)$  ale sistemului de ecuații pentru care  $z_0^2 = x_0 + y_0$ .
2. Pe mulțimea  $G = (1, +\infty)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$ .
- 5p a) Arătați că  $4 * 3 = 2$ .
- 5p b) Arătați că  $e = 9$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p c) Determinați  $x \in G$ , știind că este egal cu simetricul lui în raport cu legea de compoziție „\*”.

- 
1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ .
- 5p c) Determinați imaginea funcției  $f$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ . Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^3 f^2(x) dx = 15$ .
- 5p b) Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .
- 5p c) Arătați că  $(n+2)I_n + 2(n-1)I_{n-2} = 3\sqrt{3}$ , pentru orice număr natural  $n$ ,  $n \geq 3$ .